Roll No. .... Total Printed Pages - 8

F-3610

B.Sc. (Part - I) Examination, 2022

(New Course)

MATHEMATICS

PAPER THIRD

(Vector Analysis and Geometry)

Time : Three Hours] *[Maximum Marks:50*

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : All questions are compulsory. Solve any two parts of each question. All questions carry equal marks.

इकाई - 1 / Unit - 1

1. (अ) सिद्ध कीजिए कि चार बिन्दु 4i + 5j + k, - (j + k), 3i + 9j

P.T.O.

+ 4k) और 4(- i + j + k) समतलीय हैं।

Show that the four points 4i + 5j + k, - (j + k), 3i + 9j + 4k) and 4(- i + j + k) are coplanar.

(ब) यदि $a = \sin\theta i + \cos\theta j + \theta k,\ b = \cos\theta i - \sin\theta j - 3k$; $c = 2i + 3j - k$ हो, तो $\theta = 0$ पर $\frac{d}{d\theta}[a \times (b \times c)]$ ज्ञात कीजिए।

If $a = \sin\theta i + \cos\theta j + \theta k, \quad b = \cos\theta i - \sin\theta j - 3k$; $c = 2i + 3j - k$, find $\frac{d}{d\theta}[a \times (b \times c)]$ at $\theta = 0$

(स) दर्शाइए कि $\nabla^2 f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r).$

Show that $\nabla^2 f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r).$

इकाई - 2 / Unit - 2

2. (अ) यदि $a(t) = ti - t^2 j + (t-1)k$ तथा $b(t) = 2t^2 i + 6tk$ तो दर्शाइए कि

$$\int_0^1 a \times b \, dt = -\frac{3}{2} i - \frac{13}{6} j + \frac{2}{5} k.$$

If $a(t) = ti - t^2 j + (t-1)k$ and $b(t) = 2t^2 i + 6tk$, then show that

$$\int_0^1 a \times b \; dt = -\frac{3}{2} i - \frac{13}{6} j + \frac{2}{5} k.$$

(ब) स्टोक्स प्रमेय का सत्यापन कीजिए। जब फलन $F = x^2 i + xyj$ का समाकलन उस $x\,y$ समतल में वर्ग के परितः किया जाता है, जिसकी भुजाएं रेखाओं $x = 0, y = 0,$ $x = a,\ y = a$ के अनुदिश हैं।

Verify stoke's theorem for the function $F = x^2 i + xyj$ integrated round the square in *xy*-plane whose sides are along the lines $x = 0,\ y = 0,\ \ x = a,\ y = a$.

(स) समतल में ग्रीन के प्रमेय का सत्यापन $I = \Phi_c\ [(x+2y)\ dx + (y+3x)\ dy]$

के लिए कीजिए, जहाँ c वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ है।

Use Green's theorem in plane to evaluate $I = \Phi_c\ [(x+2y)\ dx + (y+3x)\ dy]$

where C is the circle $x^2 + y^2 = 1$.

इकाई - 3 / Unit - 3

3. (अ) शांकव का अनुरेखण कीजिए

$$x^2 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0$$

Trace the conic

$$x^2 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0$$

(ब) यदि PSP' शांकव $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ की एक नाभिगत जीवा है जिसकी नाभि S है।

दर्शाइए कि

$$\frac{1}{SP} + \frac{1}{SP'} = \frac{2}{l}$$

If PSP' is the focal chord of a conic $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ whose focus is S,

then show that

$$\frac{1}{SP} + \frac{1}{SP'} = \frac{2}{l}.$$

(स) त्रिज्याओं r_1 और r_2 को दो गोले लाम्बिक प्रतिच्छेद करते हैं। सिद्ध कीजिए कि उभयनिष्ठ वृत्त की त्रिज्या $\frac{r_1 r_2}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}$ है।

Two spheres of radii r_1 and r_2 intersect orthogonally. Prove that the radius of the common circle is $\frac{r_1 r_2}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}$

इकाई - 4 / Unit - 4

4. (अ) सिद्ध कीजिए कि शंकु $ax^2+by^2+cz^2=0$ तथा $\left(\frac{x^2}{a}\right)+\left(\frac{y^2}{b}\right)+\left(\frac{z^2}{c}\right)=0$ परस्पर व्युत्क्रम है।

Show that the cones $ax^2+by^2+cz^2=0$ and $\left(\frac{x^2}{a}\right)+\left(\frac{y^2}{b}\right)+\left(\frac{z^2}{c}\right)=0$ are mutually reciprocal.

(ब) उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी जनक रेखा $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ के समान्तर है। तथा जो वक्र $x^2+y^2=16,\ z=0$ से गुजरता है।

Find the equation of the cylinder whose generators are parallel to the line $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ and passing through the curve $x^2+y^2=16;\ z=0.$

(स) प्रतिबन्ध ज्ञात करो जबकि समतल $lx+my+nz=p$ परवलयज $ax^2+by^2=2cz$ को स्पर्श करता है।

To find the condition that plane $lx+my+nz=p$ may touch the paraboloid $ax^2+by^2=2cz$

इकाई - 5 / Unit - 5

5. (अ) अतिपरवलयज $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$ के बिन्दु (1, 2, -3) से होकर जाने वाले जनकों के समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of generating lines of the hyperboloid $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$ which pass through the point (1, 2, -3).

(ब) सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ के स्पर्श-तल पर, जो इसे संनाभि जिसका प्रावल λ है, के साथ प्रतिच्छेद वक्र के अनुदिश स्पर्श करता है, मूल बिन्दु से डाले गये लम्ब शंकु

$$\frac{a^2x^2}{a^2-\lambda}+\frac{b^2y^2}{b^2-\lambda}+\frac{c^2z^2}{c^2-\lambda}=0$$

पर स्थित है।

Prove that the perpendiculars from the origin to the tangent planes to the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ which touch it along its curve of intersection with the confocal whose parameter is λ, lie on the cone.

$$\frac{a^2x^2}{a^2-\lambda}+\frac{b^2y^2}{b^2-\lambda}+\frac{c^2z^2}{c^2-\lambda}=0$$

(स) दर्शाइए कि समीकरण

$2x^2+2y^2+z^2+2yz-2zx-4xy+x+y=0$ एक परवलयज को निरूपित करता है। समानीत समीकरण शीर्ष का निर्देशांक और अक्षों के समीकरण ज्ञात कीजिए।

Show that the equation

$2x^2+2y^2+z^2+2yz-2zx-4xy+x+y=0$ represents a paraboloid. Find the reduced equation, the co-ordinates of the vertex and equations to the axes.